

Workshop

Plans d'expériences

Matrices D-optimales

coûteuse
particulier
expérience
asymétrique
réparation
imposé
coût limité
matrice
nombre
modèle
contraintes

Que se passe-t-il quand nous ne
pouvons utiliser un plan d'expériences
classique ?



Quelques cas

- Domaine expérimental sous contraintes
- Nombre d'expériences imposé
- Modèle linéaire particulier
- Complément d'une matrice d'expériences
- Réparation d'une matrice d'expériences
- Expériences couteuses, dangereuses, ...
- Mélanges avec contraintes ...

Que faire ?



Nous devons **choisir** une stratégie expérimentale **adéquate**



Dans l'ensemble des **expériences possibles**, en tenant compte des **contraintes** de l'étude, quel est le **sous-ensemble le plus économique** qui nous apportera une information de **qualité suffisante** pour répondre à nos objectifs

→ **ensemble plus économique ?**

Nombre d'expériences minimum ou coût minimum



→ **Information de qualité suffisante ?**

Critères de qualité mathématiques

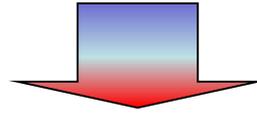


1) → ETAPE 1:

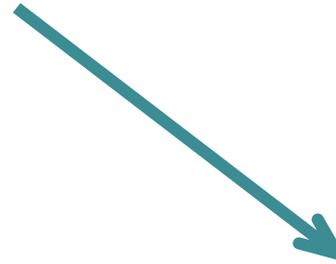
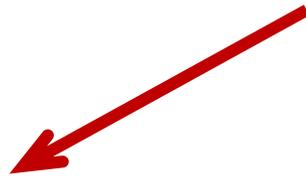
Définir les facteurs et le domaine expérimental

- ➔ **Le domaine expérimental est implicite** (expériences imposées, points candidats existants,)
- ➔ **Il faut générer des points candidats, représentatifs du domaine expérimental à explorer et de l'objectif**

2) → ETAPE 2 : Définir l'objectif



**Formaliser l'objectif sous la forme
d'un modèle mathématique**



**Il n'existe pas de matrices
d'expériences déjà construites
respectant les contraintes, pour
l'objectif de l'étude**

**Génération de matrices
d'expériences "à la carte"**



**Il existe des matrices d'expériences
déjà construites, respectant les
contraintes, pour l'objectif étudié**

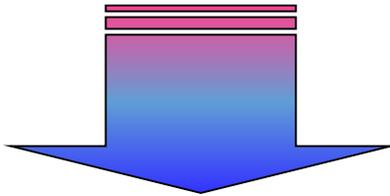
**Catalogue de matrices
d'expériences**



3) → ETAPE 3 :

Vérifier la **cohérence** entre le modèle postulé (les informations désirées) et les informations contenues dans l'ensemble des points candidats

Comment vérifier la cohérence

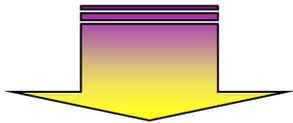


Critères

Les Critères de qualité intrinsèques

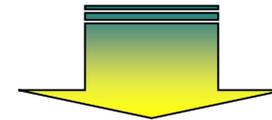
Modèles linéaires, ...

Nous voulons connaître les estimations des coefficients du modèle avec une qualité acceptable



Facteurs d'inflation

Nous voulons connaître en n'importe quel point du domaine expérimental d'intérêt, la valeur de la réponse étudiée avec une qualité acceptable



Fonction de variance maximale

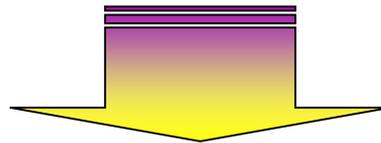
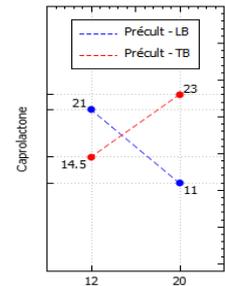
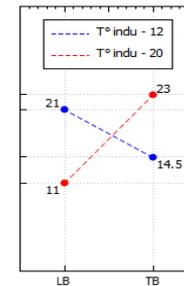
Facteurs d'inflation



Le criblage des facteurs



Les études quantitatives des facteurs



Nous voulons connaître les estimations des coefficients du modèle :

poids des facteurs, effets principaux et effets d'interaction,..

avec une qualité acceptable.

MATRICE DE VARIANCE – COVARIANCE DE B

$$\text{Var [B]} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \sigma^2$$

Var [B] : matrice de variance-covariance de B

$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$: matrice de dispersion : $\{c_{jj}\}$

c_{jj} : coefficient de variance

La variance de l'estimateur b_j est obtenue en multipliant la variance de l'erreur expérimentale σ^2 par le terme diagonal correspondant c_{jj} de la matrice de dispersion :

$$\text{var } [b_j] = c_{jj} \cdot \sigma^2$$

$$\text{covar } [b_j, b_i] = c_{ji} \cdot \sigma^2$$

Facteurs d'inflation

Le facteur d'inflation du coefficient b_j est l'élément diagonal de la matrice inverse de la matrice de corrélation,

Il peut être calculé facilement à partir de la matrice de dispersion :

$$f(b_j) = c^{jj} \sum_i (x_{ij} - x_{j,\text{moy}})^2$$

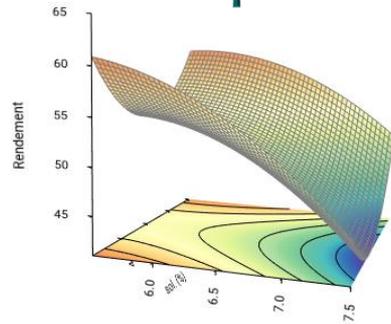
c^{jj} : coeff. de variance, élément diagonal de $(X'X)^{-1}$

$$f(b_j) \geq 1$$

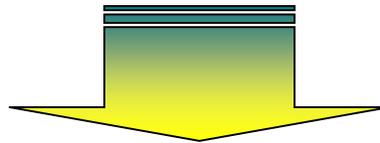
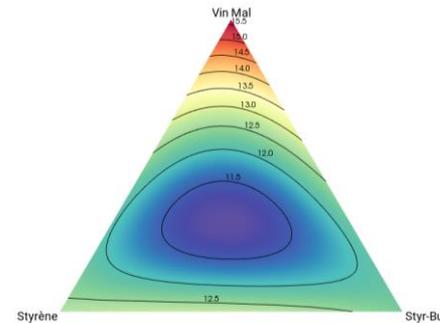
Une valeur différente de 1 indique que la matrice d'expériences n'est plus optimale. On admet que quand un facteur d'inflation a une valeur supérieure à une valeur limite (2 à 4 selon les auteurs), l'information apportée par la matrice d'expériences n'est pas de qualité suffisante pour le modèle postulé.

Fonction de variance

Les études quantitatives
de réponse



Les études de mélange



Nous voulons connaître *en n'importe quel point du domaine*
expérimental d'intérêt, la valeur de la réponse étudiée avec une
qualité acceptable

Fonction de variance

Soit x'_A , la matrice du modèle au point A : $\{x_{1A}, x_{2A}, \dots, x_{kA}\}$,

La valeur de la réponse calculée au point A est :

$$y_{\text{calc}, A} = x'_A \cdot B$$

x_A : vecteur du modèle au point A , B : vecteur des estimateurs

$$\begin{aligned} \text{var}(y_{\text{calc}, A}) &= \underbrace{x'_A (X'X)^{-1} x_A}_{d_A} \cdot \sigma^2 \\ &= d_A \sigma^2 \end{aligned}$$

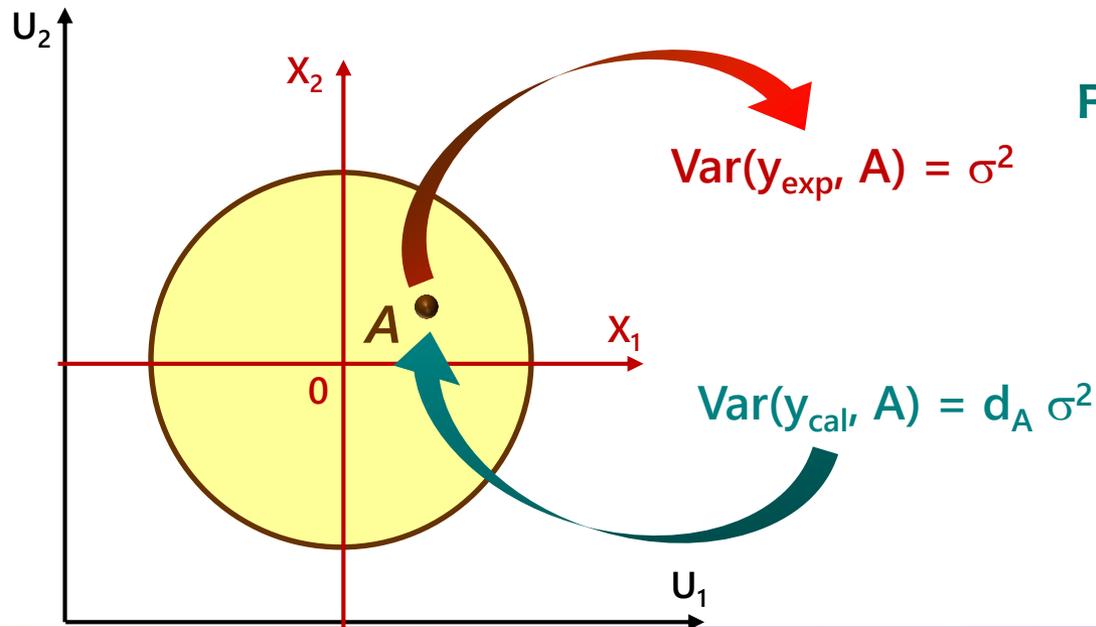
d_A : fonction de variance au point A

Modèle

Le modèle doit bien représenter le phénomène étudié dans le domaine expérimental d'intérêt



Si cela est vérifié, il doit permettre de prévoir, en n'importe quel point de ce domaine expérimental d'intérêt, la valeur de la réponse expérimentale étudiée avec la même qualité que celle que nous aurions eue si nous avions fait l'expérience en ce même point.

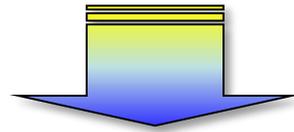


Fonction de variance maximale

$$d_{\text{Max}} \cong 1$$

4) → ETAPE 4 :

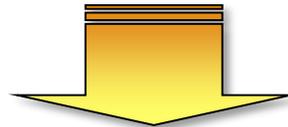
Extraire un **sous-ensemble** des points candidats le plus économique apportant une information de **qualité suffisante** pour le modèle postulé ?



Choisir les expériences qui apporteront les informations de qualité suffisante.

Combien d'expériences sont nécessaires?

Lesquelles?



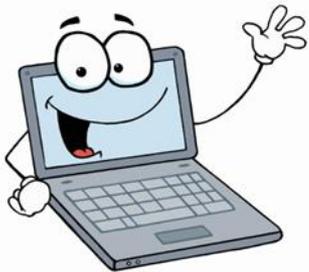
Génération de matrices d'expériences "à la carte"

Génération de matrices d'expériences "à la carte"



CRITÈRES

qui permettent, pour une valeur de N , d'obtenir **la matrice d'expériences optimale**



Critères basés sur la qualité de $(X'X)^{-1}$:

- déterminant → *critère D*
- trace → *critère A*
- fonction de variance → *critère G*
-

→ Critère-D (Déterminant)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec)$$

Dans l'ensemble Ξ_N des matrices d'expériences à N points possibles, une matrice d'expériences est dite **optimale-D** si elle conduit au **déterminant $(X'X)^{-1}$ minimal**.

Nous la noterons ξ_{N^*} et X^* sera la matrice du modèle correspondante :

$$\det \{(X^{*'} X^*)^{-1}\} = \min_{\xi_N \in \Xi_N} [\det \{(X' X)^{-1}\}]$$

Ce qui est équivalent à :

$$\det (X^{*'} X^*) = \max_{\xi_N \in \Xi_N} [\det (X' X)]$$

car,

$$\det (X^{*'} X^*) = 1 / \det \{(X' X)^{-1}\}$$

→ **Critère-A**
(Average variance of parameters)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Dans l'ensemble Ξ_N des matrices d'expériences à **N points possibles**, une matrice d'expériences est dite **optimale-A** si elle conduit à la **trace de $(X'X)^{-1}$ minimale**.

Nous la noterons ξ_{N^*} et X^* sera la matrice du modèle correspondante :

$$\text{tr} \{(X^{*'} X^*)^{-1}\} = \min_{\xi_N \in \Xi_N} [\text{trace} \{(X' X)^{-1}\}]$$

→ **Critère-G**
(**General variance**)

Dans l'ensemble \mathcal{E}_N des matrices d'expériences à **N points possibles**, une matrice d'expériences est dite **optimale-G** si elle conduit à la **fonction de variance maximale dans le domaine la plus faible possible**.

On peut calculer l'**efficacité-G** :

$$\text{Eff. G} = \frac{p}{N d_{\max}}$$

avec, p : nombre de coefficients

N : nombre d'expériences ,

d_{\max} : fonction de variance maximale

→ Efficacité-D

Soient ξ_{N^*} et $\xi_{N',\$}$ deux matrices d'expériences constituées du **même nombre d'expériences** ($N = N'$). Nous dirons que ξ_{N^*} est **meilleure** que $\xi_{N',\$}$ ($\xi_{N^*} > \xi_{N',\$}$) vis-à-vis du critère de **qualité-D** si :

$$\det (X^{*'} X^*) > \det (X_{\$}' X_{\$})$$

L'**efficacité-D** d'une matrice d'expériences ξ_N par rapport à une matrice ξ_{N^*} est définie par :

$$\text{eff.D} = 100 [\det (X' X) / \det (X^{*'} X^*)]^{1/p}$$

→ Efficacité-M

Soient ξ_{N^*} et $\xi_{N'\$}$ deux matrices d'expériences constituées respectivement de N et N' expériences, nous dirons que ξ_{N^*} est **plus efficace** que $\xi_{N'\$}$ vis-à-vis du critère de **qualité-D** si :

$$\det M(\xi_{N^*}) > \det M(\xi_{N'\$})$$

avec,

$$M(\xi_{N^*}) = (X'X)/N$$

$$\det M(\xi_{N^*}) = \det (X^*{}'X^*) / N^p$$

$$\det M(\xi_{N'\$}) = \det (X_{\$}'X_{\$}) / N'^p$$

L'**efficacité-M** de ξ_{N^*} par rapport à $\xi_{N'\$}$ est définie par :

$$\text{eff. M} = 100 [\det M(\xi_{N^*}) / \det M(\xi_{N'\$})]^{1/p}$$

Détermination des matrices d'expériences optimales :

- ➔ Fixer la valeur minimale de $N \rightarrow N_I$
- ➔ Fixer la valeur maximale de $N \rightarrow N_F$ ($N_F \leq N_C$)
- ➔ Dans l'ensemble des matrices d'expériences ξ_N , on recherche la matrice d'expériences ξ_N^* , optimale suivant un **critère d'optimalité choisi**,

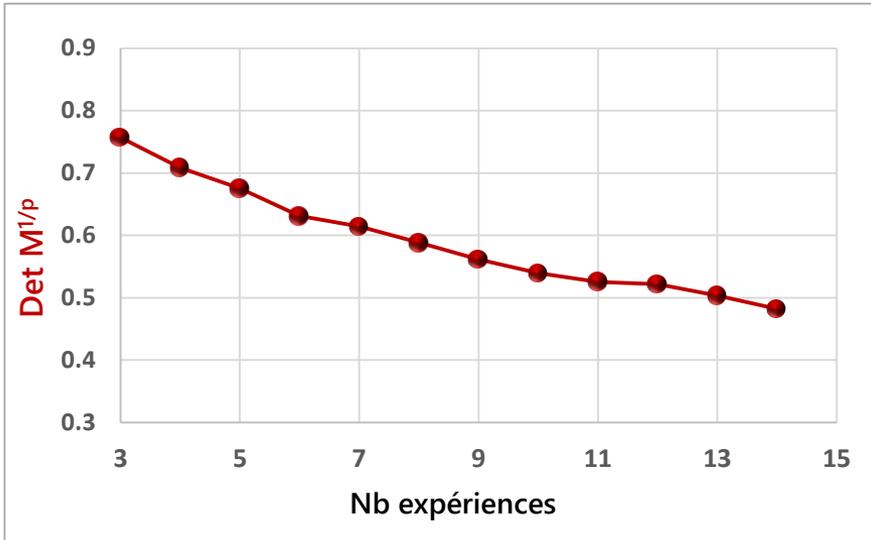
L'ensemble comprend un nombre de matrices d'expériences distinctes donné par la relation :

$$\frac{N_C!}{(N_C - N)! N!}$$

- ➔ Répéter cet algorithme pour différentes valeurs de N et on obtient ainsi l'ensemble des solutions optimales ξ_N^* (suivant **le critère choisi**)

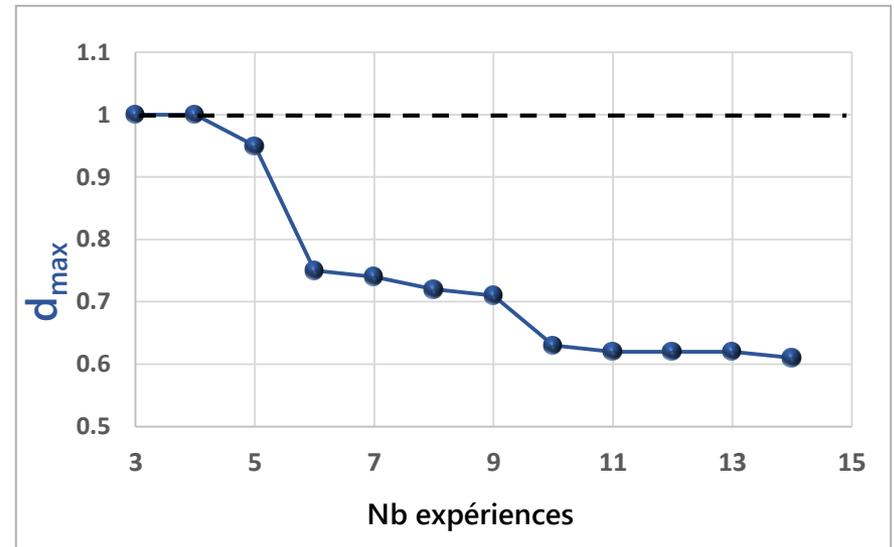
Matrices d'expériences optimales-D

Det $M^{1/p}$

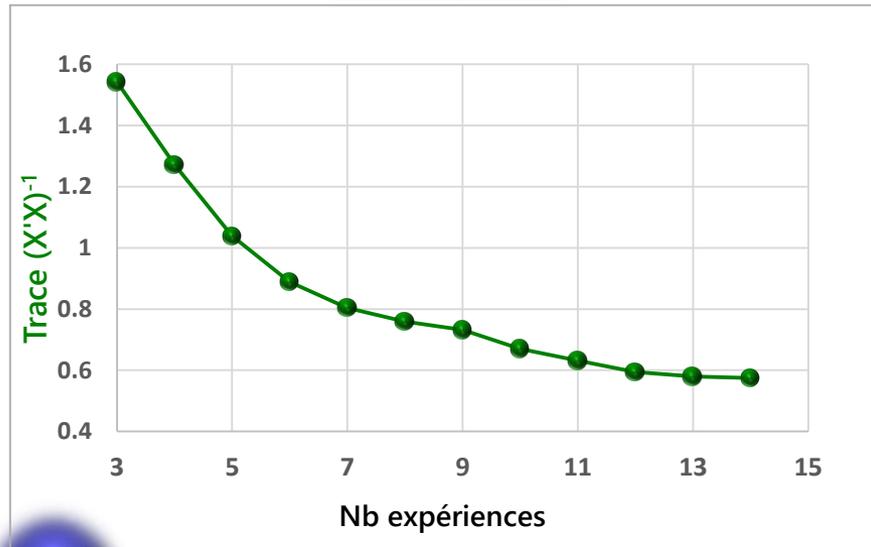


Variation des propriétés en fonction du nombre de points

Fonction de variance maximale

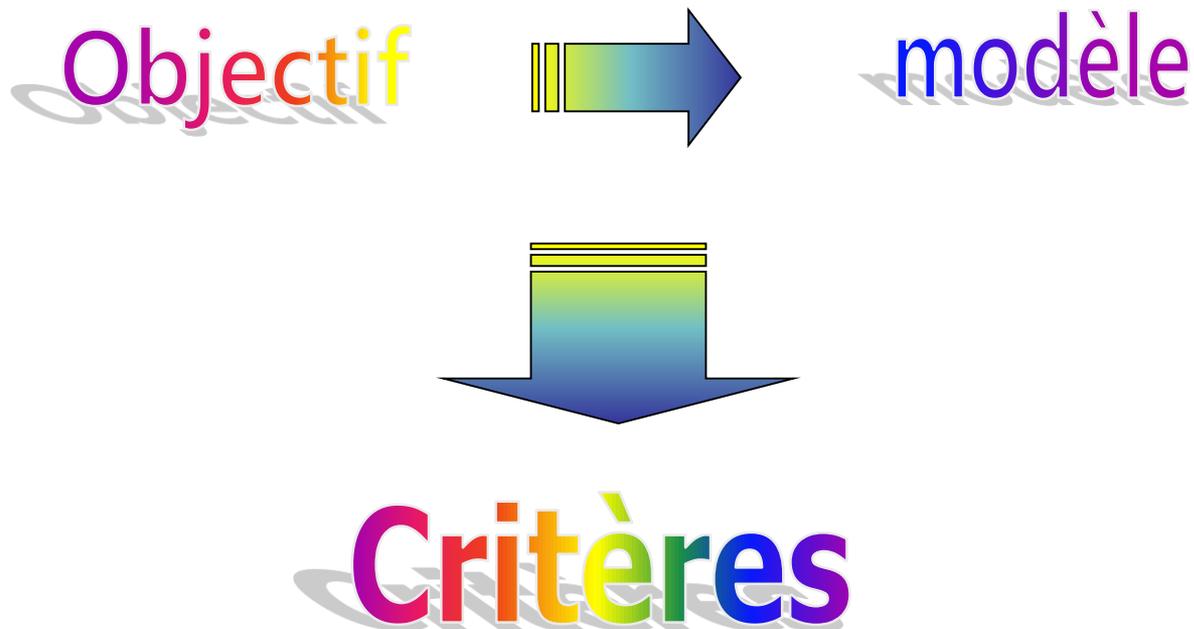


Trace $(X'X)^{-1}$

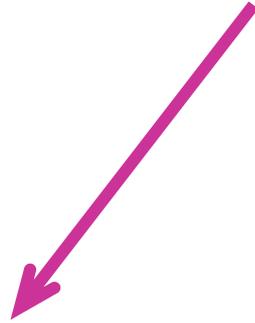


Détermination des matrices d'expériences finales

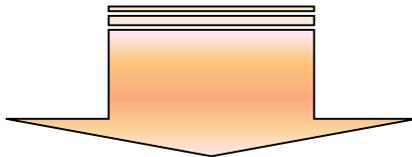
Pour déterminer les matrices d'expériences de qualité acceptable, on compare les matrices d'expériences optimales en prenant en compte les différents critères de choix qui dépendent de l'objectif.



Critères



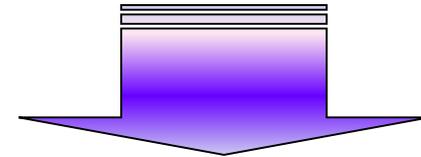
* Critères qui permettent, pour une valeur de N , de choisir la matrice d'expériences optimale (suivant le critère choisi)



Critères de type I



* Critères qui permettent de choisir dans un ensemble de matrices d'expériences optimales (selon le critère de type I choisi), la ou les matrice(s) d'expériences de qualité acceptable

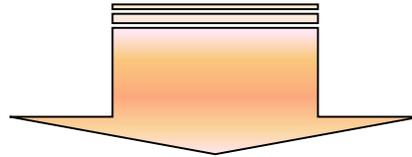


Critères de type II

Critères de type I

➔ Critères qui permettent, **pour une valeur de N**, d'obtenir la matrice d'expériences **optimale**

Modèles linéaires ou non linéaires, ...



Critères basés la qualité de $(X'X)^{-1}$

- déterminant : critère D
- trace : critère A
-

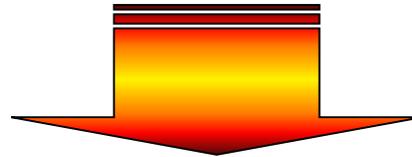
* Soit M : matrices d'expériences optimales (suivant le critère de type I choisi)

* Soit $M = (N_F - N_I + 1)$ matrices d'expériences optimales (suivant le critère de type I choisi)

N_I : nombre d'expériences initial

N_F : nombre d'expériences final

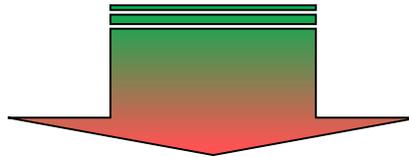
Laquelle ou lesquelles choisir ?



Critères de type II

Critères de type II

➔ Critères qui doivent nous permettre de choisir dans un ensemble de matrices d'expériences optimales (suivant **le critère de type I choisi**), la ou les matrices d'expériences de **qualité acceptable.**

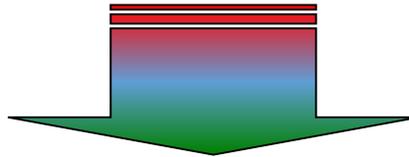


Que devons-nous choisir comme critère de qualité ?



Critères de type II

Modèles linéaires ...



- ➔ Critères basés la qualité de l'information désirée :
 - ➔ *facteurs d'inflation*
 - ➔ *fonction de variance maximale dans TOUT le domaine d'intérêt (ou pour tous les points candidats)*

1) → ETAPE 1 :

Définir les facteurs et le domaine expérimental

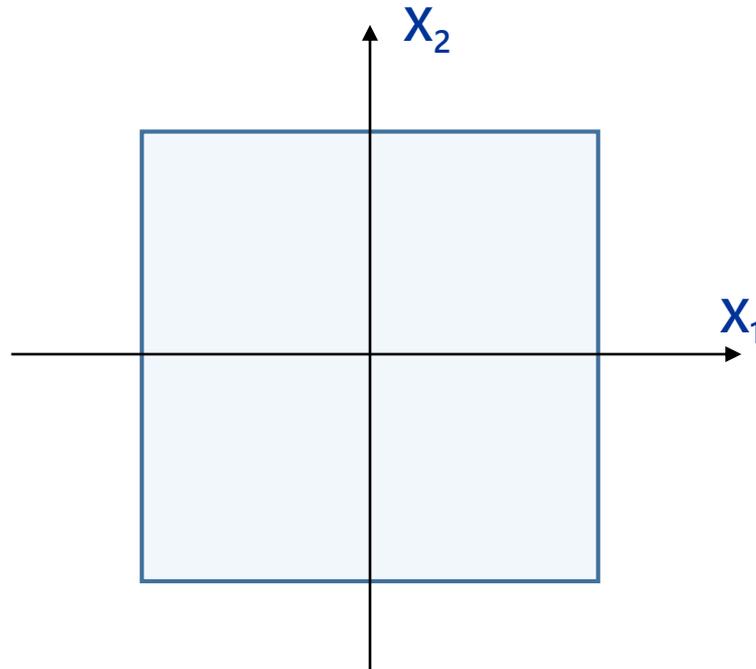
- ➔ **Le domaine expérimental est implicite** (expériences imposées, points candidats existants,)
- ➔ **Il faut générer des points candidats, représentatifs du domaine expérimental à explorer et de l'objectif**

→ **ETAPE 1** : Construction des points candidats

1) $k = 2$

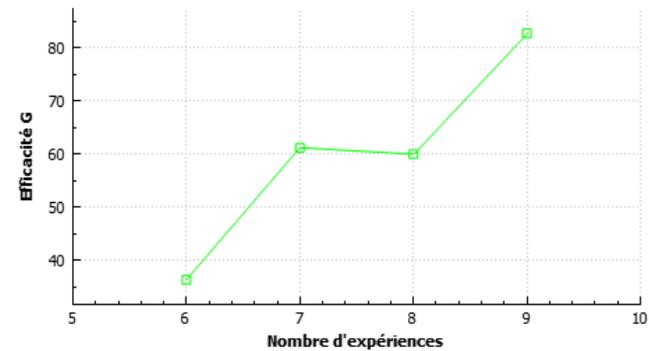
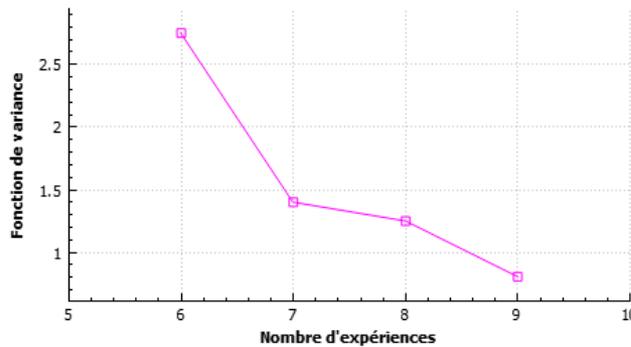
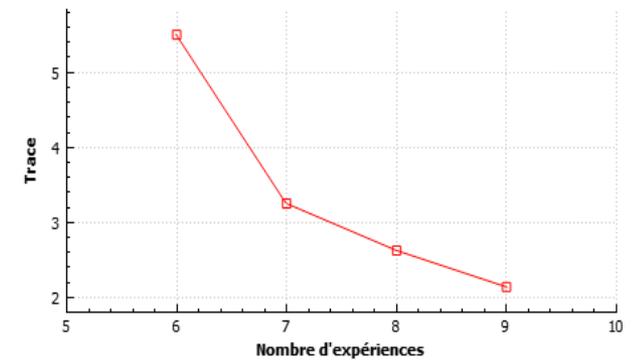
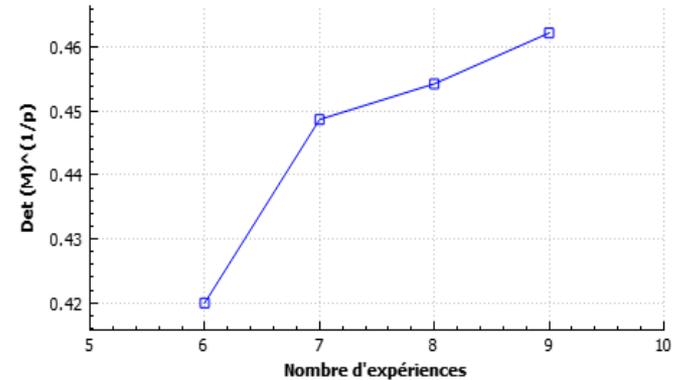
$$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} X_1 X_2$$

Domaine expérimental :



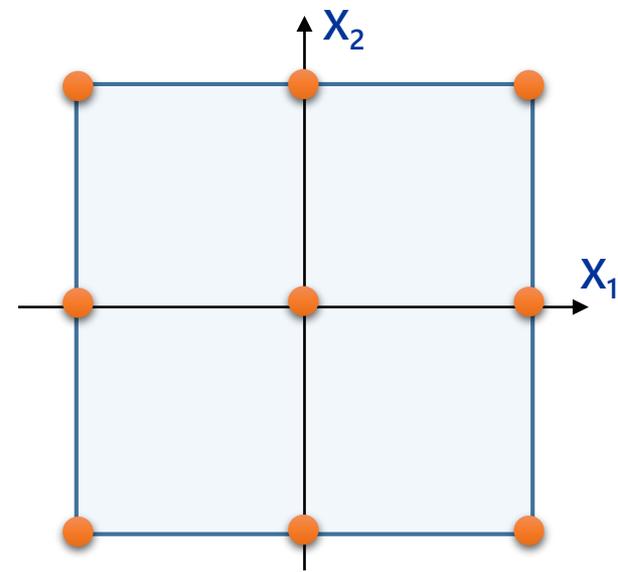
■ Points candidats : Grille 3 niveaux

Nb.	Critère	Det X'X	det(M) ^{1/p}	Trace	VIF	dmax	Eff. G
6	det(M)	2.520	0.420	5.500	2.000	2.750	36
6	Trace	2.520	0.420	5.500	2.000	2.750	36
6	dmax	2.520	0.420	6.500	1.250	2.750	36
6	Eff. G	2.520	0.420	5.500	2.000	2.750	36
7	det(M)	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	Trace	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	dmax	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	Eff. G	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
8	det(M)	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	Trace	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	dmax	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	Eff. G	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
9	det(M)	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Trace	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	dmax	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Eff. G	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83

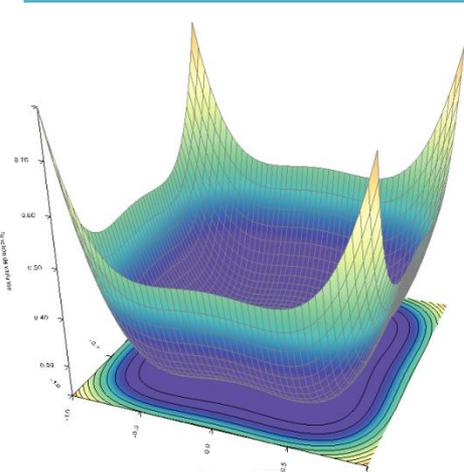


Points candidats : Grille 3 niveaux

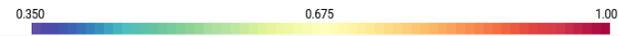
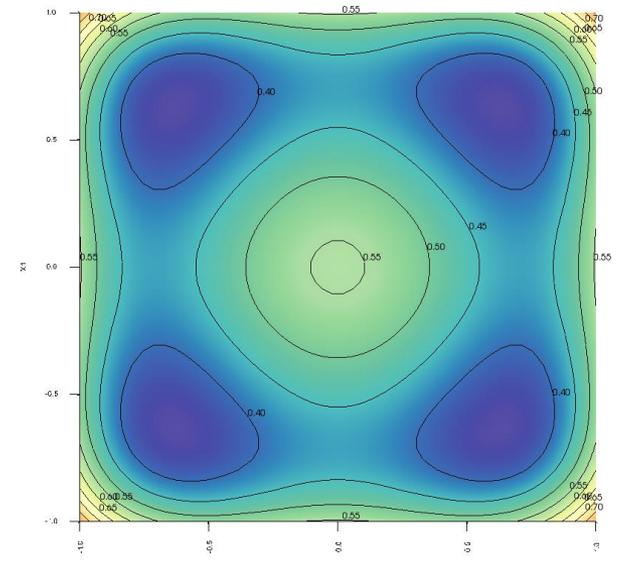
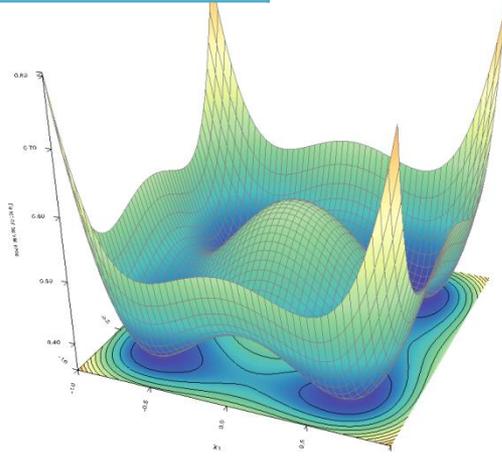
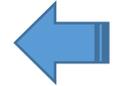
Nb	Critère	Det X'X	det(M) ^{1/p}	Trace	VIF	dmax	Eff. G
6	det(M)	2.520	0.420	5.500	2.000	2.750	36
6	Trace	2.520	0.420	5.500	2.000	2.750	36
6	dmax	2.520	0.420	6.500	1.250	2.750	36
6	Eff. G	2.520	0.420	5.500	2.000	2.750	36
7	det(M)	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	Trace	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	dmax	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	Eff. G	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
8	det(M)	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	Trace	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	dmax	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	Eff. G	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
9	det(M)	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Trace	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	dmax	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Eff. G	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83



Fonction de variance : d_U

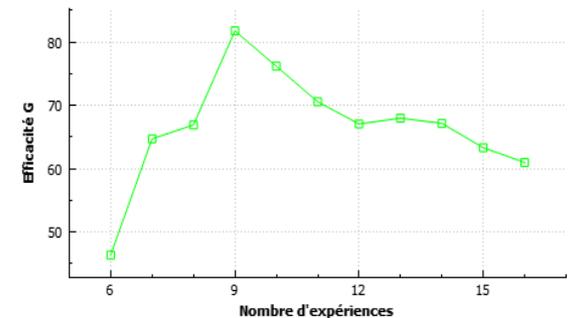
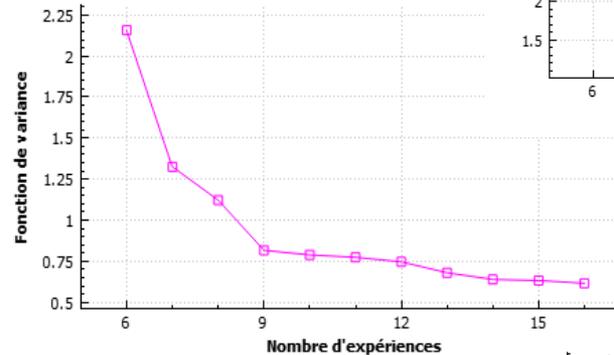
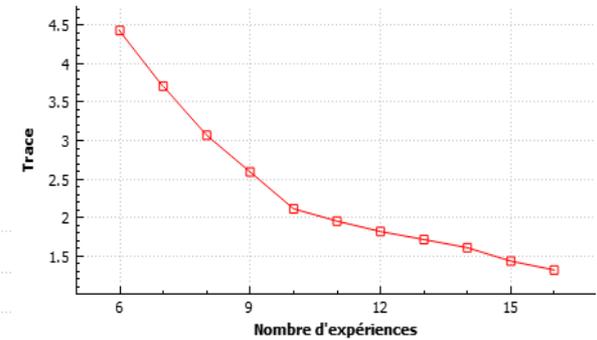
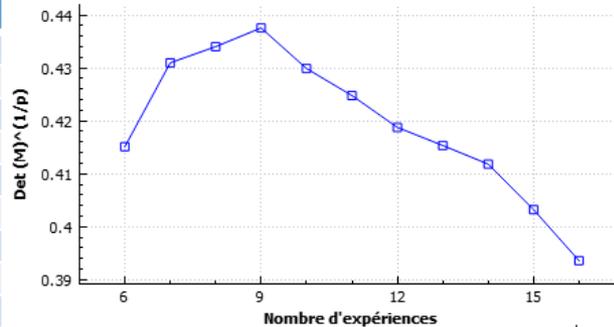


3 points au centre



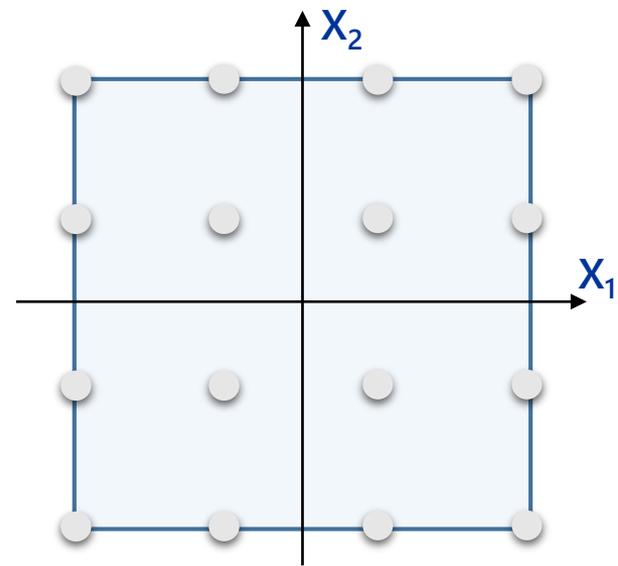
Points candidats : Grille 4 niveaux

Nb. exp.	Critère	det	det(M)	Trace	VIF	dmax	Eff. G
6	det(M)	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
6	Trace	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
6	dmax	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
6	Eff. G	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
7	det(M)	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
7	Trace	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
7	dmax	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
7	Eff. G	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
8	det(M)	3.472	0.434	3.067	1.059	1.128	66
8	Trace	3.472	0.434	3.067	1.059	1.128	66
8	dmax	3.467	0.433	3.083	1.070	1.121	67
8	Eff. G	3.467	0.433	3.083	1.070	1.121	67
9	det(M)	3.938	0.438	2.592	1.035	0.930	72
9	Trace	3.938	0.438	2.592	1.035	0.930	72
9	dmax	3.904	0.434	2.669	1.112	0.816	82
9	Eff. G	3.904	0.434	2.669	1.112	0.816	82
10	det(M)	4.299	0.430	2.376	1.031	0.913	66
10	Trace	4.277	0.428	2.113	1.031	0.873	69
10	dmax	4.266	0.427	2.430	1.060	0.788	76
10	Eff. G	4.266	0.427	2.430	1.060	0.788	76
11	det(M)	4.672	0.425	2.180	1.041	0.890	61
11	Trace	4.643	0.422	1.953	1.028	0.897	61
11	dmax	4.617	0.420	2.254	1.101	0.773	71
11	Eff. G	4.617	0.420	2.254	1.101	0.773	71
12	det(M)	5.025	0.419	2.061	1.083	0.777	64
12	Trace	5.004	0.417	1.818	1.033	0.881	57
12	dmax	4.987	0.416	1.843	1.022	0.746	67
12	Eff. G	4.987	0.416	1.843	1.022	0.746	67
13	det(M)	5.399	0.415	1.942	1.106	0.679	68
13	Trace	5.371	0.413	1.714	1.028	0.746	62
13	dmax	5.399	0.415	1.942	1.106	0.679	68
13	Eff. G	5.399	0.415	1.942	1.106	0.679	68
14	det(M)	5.765	0.412	1.608	1.030	0.638	67
14	Trace	5.765	0.412	1.608	1.030	0.638	67
14	dmax	5.765	0.412	1.608	1.030	0.638	67

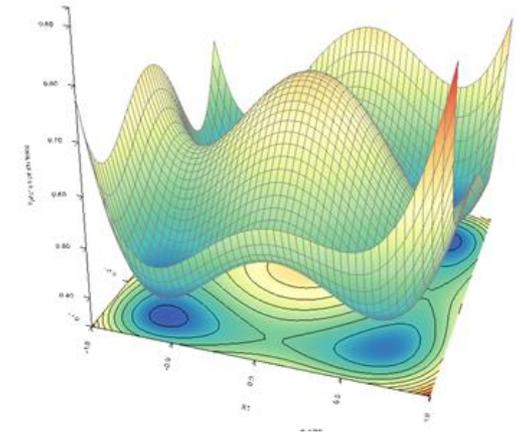
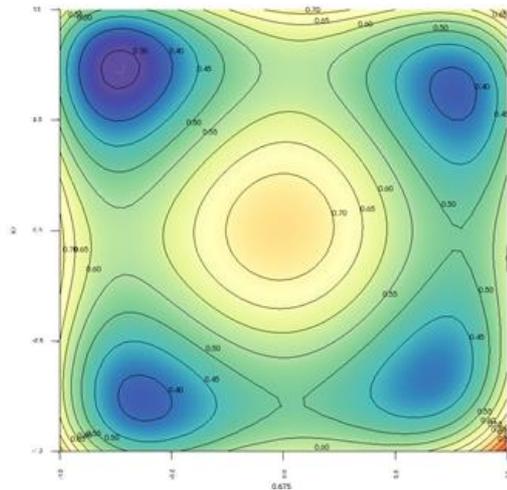


Points candidats : Grille 4 niveaux

Nb.	Critère	det	det(M) ^{1/p}	Trace	VIF	dmax	Eff. G
6	det(M)	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
6	Trace	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
6	dmax	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
6	Eff. G	2.491	0.415	4.429	1.260	2.157	46
7	det(M)	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
7	Trace	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
7	dmax	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
7	Eff. G	3.017	0.431	3.704	1.183	1.325	65
8	det(M)	3.472	0.434	3.067	1.059	1.128	66
8	Trace	3.472	0.434	3.067	1.059	1.128	66
8	dmax	3.467	0.433	3.083	1.070	1.121	67
8	Eff. G	3.467	0.433	3.083	1.070	1.121	67
9	det(M)	3.938	0.438	2.592	1.035	0.930	72
9	Trace	3.938	0.438	2.592	1.035	0.930	72
9	dmax	3.904	0.434	2.669	1.112	0.816	82
9	Eff. G	3.904	0.434	2.669	1.112	0.816	82
10	det(M)	4.299	0.430	2.376	1.031	0.913	66
10	Trace	4.277	0.428	2.113	1.031	0.873	69
10	dmax	4.266	0.427	2.430	1.060	0.788	76
10	Eff. G	4.266	0.427	2.430	1.060	0.788	76
11	det(M)	4.672	0.425	2.180	1.041	0.890	61
11	Trace	4.643	0.422	1.953	1.028	0.897	61
11	dmax	4.617	0.420	2.254	1.101	0.773	71
11	Eff. G	4.617	0.420	2.254	1.101	0.773	71
12	det(M)	5.025	0.419	2.061	1.083	0.777	64
12	Trace	5.004	0.417	1.818	1.033	0.881	57
12	dmax	4.987	0.416	1.843	1.022	0.746	67
12	Eff. G	4.987	0.416	1.843	1.022	0.746	67
13	det(M)	5.399	0.415	1.942	1.106	0.679	68
13	Trace	5.371	0.413	1.714	1.028	0.746	62
13	dmax	5.399	0.415	1.942	1.106	0.679	68
13	Eff. G	5.399	0.415	1.942	1.106	0.679	68
14	det(M)	5.765	0.412	1.608	1.030	0.638	67
14	Trace	5.765	0.412	1.608	1.030	0.638	67
14	dmax	5.765	0.412	1.608	1.030	0.638	67

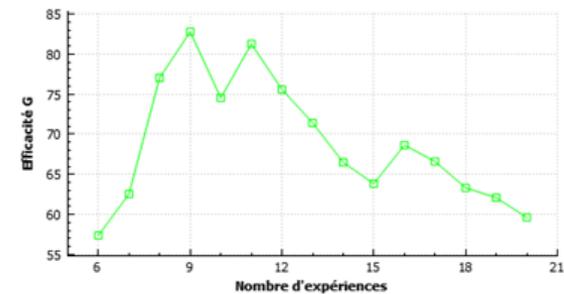
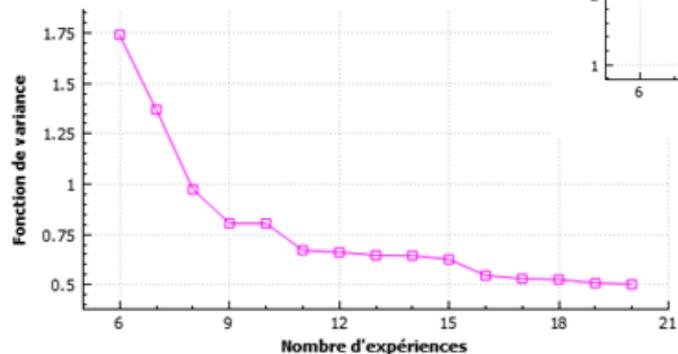
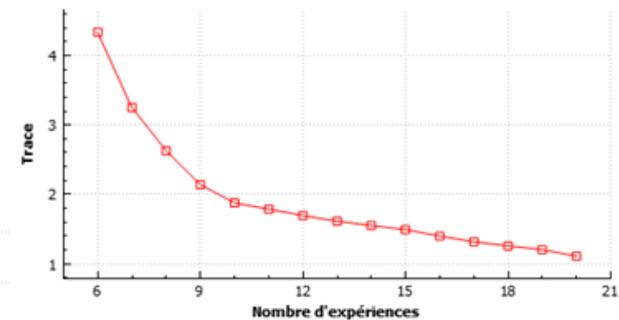
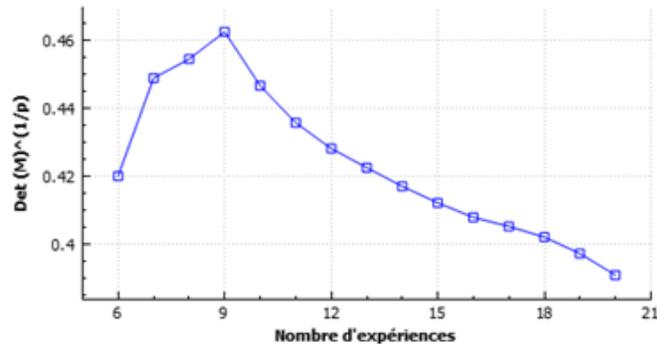


Fonction de variance : d_U



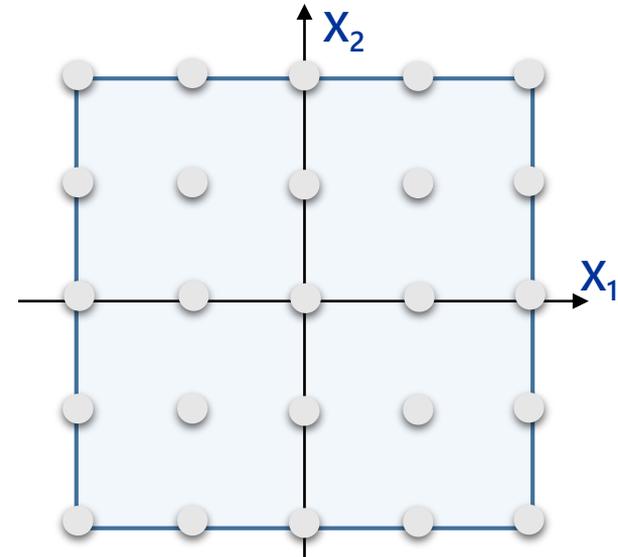
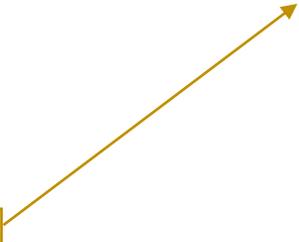
Points candidats : Grille 5 niveaux

Nb. e	Critère	det	det(M)	Trace	VIF	dmax	Eff. G
6	det(M)	2.520	0.420	5.187	1.578	2.406	42
6	Trace	2.381	0.397	4.333	1.236	2.111	47
6	dmax	2.507	0.418	4.516	1.408	1.743	57
6	Eff. G	2.507	0.418	4.516	1.408	1.743	57
7	det(M)	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	Trace	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	dmax	2.969	0.424	3.548	1.116	1.370	63
7	Eff. G	2.969	0.424	3.548	1.116	1.370	63
8	det(M)	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	Trace	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	dmax	3.631	0.454	2.688	1.059	0.974	77
8	Eff. G	3.631	0.454	2.688	1.059	0.974	77
9	det(M)	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Trace	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	dmax	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Eff. G	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
10	det(M)	4.464	0.446	2.100	1.009	0.806	74
10	Trace	4.432	0.443	1.876	1.018	0.805	74
10	dmax	4.463	0.446	2.047	1.024	0.805	75
10	Eff. G	4.463	0.446	2.047	1.024	0.805	75
11	det(M)	4.791	0.436	2.004	1.015	0.804	68
11	Trace	4.754	0.432	1.785	1.027	0.805	68
11	dmax	4.787	0.435	2.067	1.002	0.671	81
11	Eff. G	4.787	0.435	2.067	1.002	0.671	81
12	det(M)	5.136	0.428	1.918	1.048	0.665	75
12	Trace	5.082	0.423	1.694	1.036	0.804	62
12	dmax	5.104	0.425	1.928	1.030	0.662	76
12	Eff. G	5.104	0.425	1.928	1.030	0.662	76
13	det(M)	5.492	0.422	1.827	1.049	0.665	69
13	Trace	5.445	0.419	1.611	1.049	0.803	58
13	dmax	5.468	0.421	1.648	1.046	0.646	71
13	Eff. G	5.468	0.421	1.648	1.046	0.646	71
14	det(M)	5.837	0.417	1.559	1.021	0.664	65
14	Trace	5.765	0.412	1.549	1.056	0.793	54
14	dmax	5.803	0.414	1.638	1.013	0.645	66
14	Eff. G	5.803	0.414	1.638	1.013	0.645	66
15	det(M)	6.182	0.412	1.496	1.021	0.655	61
15	Trace	6.134	0.409	1.491	1.050	0.790	51

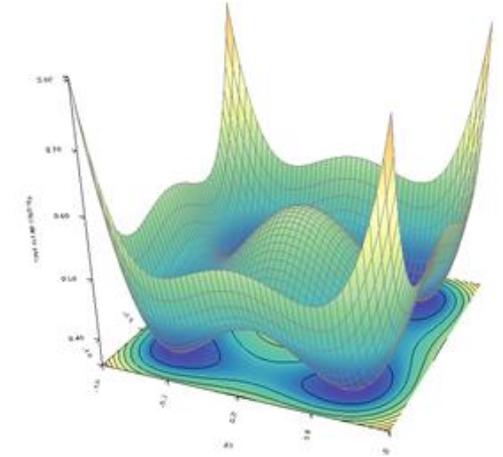
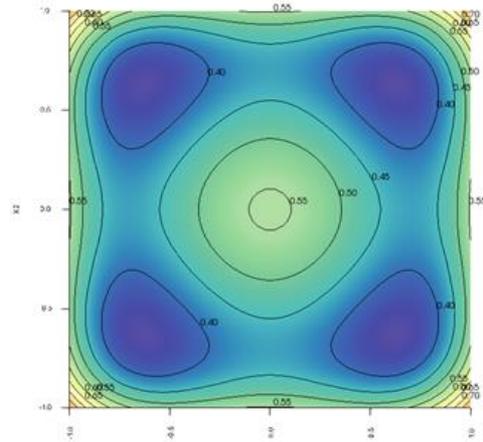


■ **Points candidats : Grille 5 niveaux**

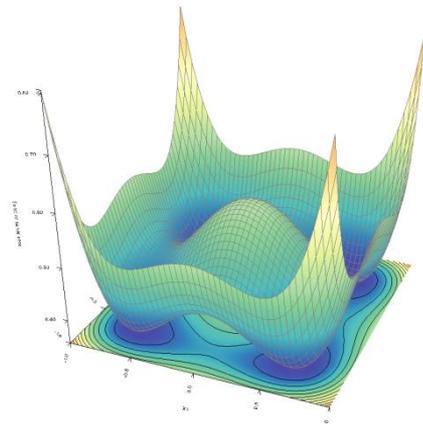
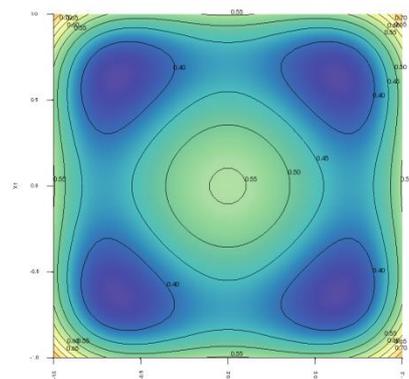
Nb. e	Critère	det	det(M)	Trace	VIF	dmax	Eff. G
6	det(M)	2.520	0.420	5.187	1.578	2.406	42
6	Trace	2.381	0.397	4.333	1.236	2.111	47
6	dmax	2.507	0.418	4.516	1.408	1.743	57
6	Eff. G	2.507	0.418	4.516	1.408	1.743	57
7	det(M)	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	Trace	3.141	0.449	3.250	1.286	1.400	61
7	dmax	2.969	0.424	3.548	1.116	1.370	63
7	Eff. G	2.969	0.424	3.548	1.116	1.370	63
8	det(M)	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	Trace	3.634	0.454	2.625	1.125	1.250	60
8	dmax	3.631	0.454	2.688	1.059	0.974	77
8	Eff. G	3.631	0.454	2.688	1.059	0.974	77
9	det(M)	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Trace	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	dmax	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
9	Eff. G	4.160	0.462	2.139	1.000	0.806	83
10	det(M)	4.464	0.446	2.100	1.009	0.806	74
10	Trace	4.432	0.443	1.876	1.018	0.805	74
10	dmax	4.463	0.446	2.047	1.024	0.805	75
10	Eff. G	4.463	0.446	2.047	1.024	0.805	75
11	det(M)	4.791	0.436	2.004	1.015	0.804	68
11	Trace	4.754	0.432	1.785	1.027	0.805	68
11	dmax	4.787	0.435	2.067	1.002	0.671	81
11	Eff. G	4.787	0.435	2.067	1.002	0.671	81
12	det(M)	5.136	0.428	1.918	1.048	0.665	75
12	Trace	5.082	0.423	1.694	1.036	0.804	62
12	dmax	5.104	0.425	1.928	1.030	0.662	76
12	Eff. G	5.104	0.425	1.928	1.030	0.662	76
13	det(M)	5.492	0.422	1.827	1.049	0.665	69
13	Trace	5.445	0.419	1.611	1.049	0.803	58
13	dmax	5.468	0.421	1.648	1.046	0.646	71
13	Eff. G	5.468	0.421	1.648	1.046	0.646	71
14	det(M)	5.837	0.417	1.559	1.021	0.664	65
14	Trace	5.765	0.412	1.549	1.056	0.793	54
14	dmax	5.803	0.414	1.638	1.013	0.645	66
14	Eff. G	5.803	0.414	1.638	1.013	0.645	66
15	det(M)	6.182	0.412	1.496	1.021	0.655	61
15	Trace	6.134	0.409	1.491	1.050	0.790	51



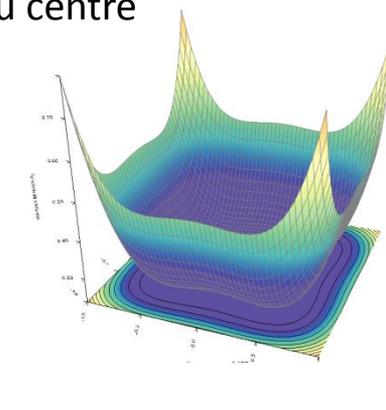
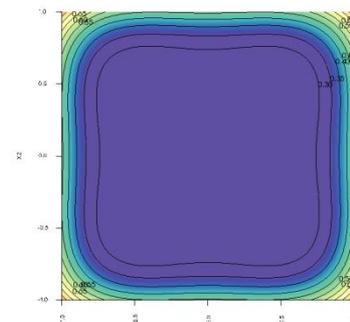
Fonction de variance: d_U



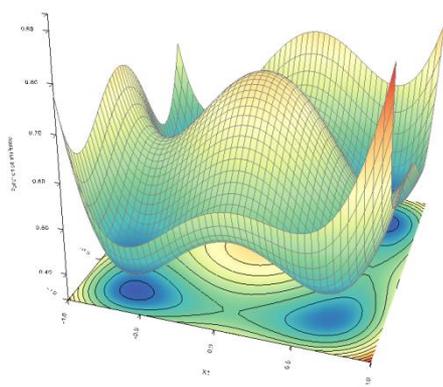
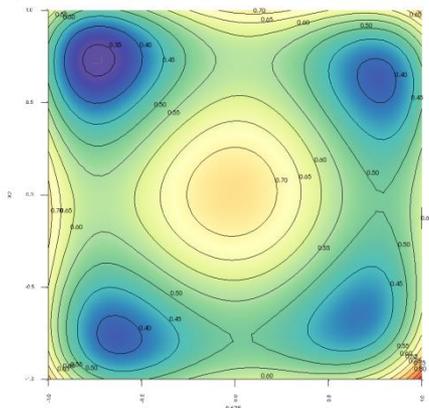
Grille 3 niveaux



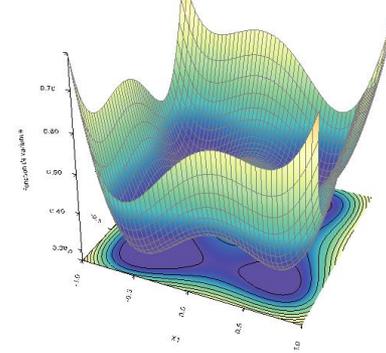
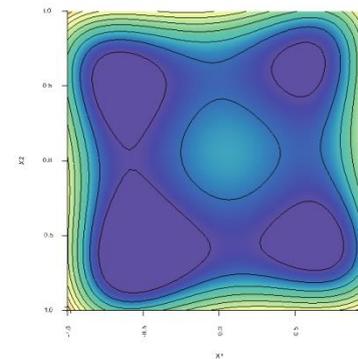
3 points au centre



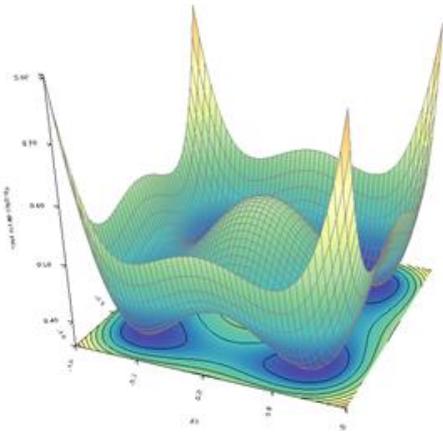
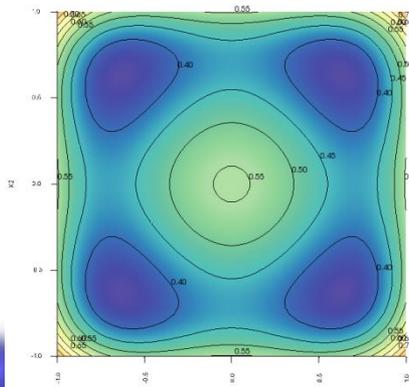
Grille 4 niveaux



+ 1 point au centre



Grille 5 niveaux



3 points au centre

