



A Class of Three-Level Designs for Definitive Screening in the Presence of Second-Order Effects

BRADLEY JONES

SAS Institute, Cary, NC 27513

CHRISTOPHER J. NACHTSHEIM

Carlson School of Management, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455

ORIGINAL

1. The number of required runs is only one more than twice the number of factors.
2. Unlike resolution III designs, main effects are completely independent of two-factor interactions. As a result, estimates of main effects are not biased by the presence of active two-factor interactions, regardless of whether the interactions are included in the model.
3. Unlike resolution IV designs, two-factor interactions are not completely confounded with other two-factor interactions, although they may be correlated.
4. Unlike resolution III, IV, and V designs with added center points, all quadratic effects are estimable in models comprised of any number of linear and quadratic main-effects terms.
5. Quadratic effects are orthogonal to main effects and not completely confounded (though correlated) with interaction effects.
6. With 6 through (at least) 12 factors, the designs are capable of estimating all possible full quadratic models involving three or fewer factors with very high levels of statistical efficiency.



Peu couteux en termes d'expériences



Effets principaux indépendants des effets d'interaction



Effets d'interaction à deux facteurs pas complètement confondus



Tous les effets quadratiques peuvent être estimés



Les effets quadratiques sont orthogonaux aux effets principaux et pas complètement confondus avec les effets d'interaction



Entre 6 et 12 facteurs, tous les modèles quadratiques complets peuvent être estimés impliquant au maximum 3 facteurs

Matrices d'Hadamard

Résolution III



- tous les coefficients monoindexés b_i sont connus indépendamment des autres coefficients monoindexés
- certains seront aliasés avec des coefficients bi-indexés

Avec la matrice **H**

$$E [L_0] = \beta_0$$

$$E [L_i] = \beta_i \pm a_{jm} \beta_{jm} \quad (j, m \neq i)$$

Fold over

H

-H



Résolution IV



- tous les coefficients monoindexés b_i sont connus indépendamment des coefficients bi-indexés
- certains seront aliasés avec des coefficients tri-indexés
- certains effets d'interaction du premier ordre seront aliasés avec d'autres effets d'interaction du premier ordre

avec la matrice **-H**,

$$E [L'_0] = \beta_0$$

$$E [L'_i] = \beta_i \pm a_{jm} \beta_{jm} \quad (j, m \neq i)$$

$$E [(L_0 + L'_0)/2] = \beta_0$$

$$E [(L_i + L'_i)/2] = \beta_i$$

$$E [(L_i - L'_i)/2] = \pm a_{jm} \beta_{jm} \quad (j, m \neq i)$$

Construction

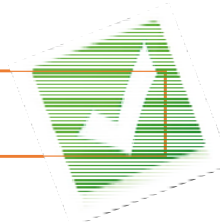
1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre

$k = 4$

	X_1	X_2	X_3	X_4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9	0	0	0	0



Peu couteux en termes d'expériences



Construction

1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre
2. On remplit aléatoirement les lignes impaires par des -1 et $+1$ sauf sur la diagonale qui contient que des 0
3. Les lignes paires sont obtenues en multipliant les lignes impaires par -1 (effet miroir)

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	+1	-1	-1
3	-1	0	+1	-1
5	+1	-1	0	+1
7	+1	+1	-1	0

$\times (-1)$

	X_1	X_2	X_3	X_4
2	0	-1	+1	+1
4	+1	0	-1	+1
6	-1	+1	0	-1
8	-1	-1	+1	0

Construction

1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre
2. On remplit aléatoirement les lignes impaires par des -1 et +1 sauf sur la diagonale qui contient que des 0
3. Les lignes paires sont obtenues en multipliant les lignes impaires par -1 (effet miroir)

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	+1	-1	-1
2	0	-1	+1	+1
3	-1	0	+1	-1
4	+1	0	-1	+1
5	+1	-1	0	+1
6	-1	+1	0	-1
7	+1	+1	-1	0
8	-1	-1	+1	0
9	0	0	0	0



Construction

1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre
2. On remplit aléatoirement les lignes impaires par des -1 et +1 sauf sur la diagonale qui contient que des 0
3. Les lignes paires sont obtenues en multipliant les lignes impaires par -1 (effet miroir)
4. On calcule le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	+1	-1	-1
2	0	-1	+1	+1
3	-1	0	+1	-1
4	+1	0	-1	+1
5	+1	-1	0	+1
6	-1	+1	0	-1
7	+1	+1	-1	0
8	-1	-1	+1	0
9	0	0	0	0

$$\det (X'X) = 144$$

Construction

1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre
2. On remplit aléatoirement les lignes impaires par des -1 et +1 sauf sur la diagonale qui contient que des 0
3. Les lignes paires sont obtenues en multipliant les lignes impaires par -1 (effet miroir)
4. On calcule le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
5. On cherche à **maximiser** le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
 - i. on va tester si le changement du signe d'une colonne d'une ligne impaire et de son miroir conduit à une amélioration du déterminant

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	+1 -1	-1	-1
2	0	-1 +1	+1	+1
3	-1	0	+1	-1
4	+1	0	-1	+1
5	+1	-1	0	+1
6	-1	+1	0	-1
7	+1	+1	-1	0
8	-1	-1	+1	0
9	0	0	0	0

~~$\det(X'X) = 144$~~

$\det(X'X) = 1296$



On conserve le
changement
qui est
favorable



Construction

1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre
2. On remplit aléatoirement les lignes impaires par des -1 et +1 sauf sur la diagonale qui contient que des 0
3. Les lignes paires sont obtenues en multipliant les lignes impaires par -1 (effet miroir)
4. On calcule le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
5. On cherche à **maximiser** le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
 - i. on va tester si le changement du signe d'une colonne d'une ligne impaire et de son miroir conduit à une amélioration du déterminant

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	-1	-1 +1	-1
2	0	+1	+1 -1	+1
3	-1	0	+1	-1
4	+1	0	-1	+1
5	+1	-1	0	+1
6	-1	+1	0	-1
7	+1	+1	-1	0
8	-1	-1	+1	0
9	0	0	0	0

~~$\det(X'X) = 144$~~

$\det(X'X) = 1296$

$\det(X'X) = 144$



Le
déterminant
diminue : le
changement
n'est pas
conservé



Construction

1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre
2. On remplit aléatoirement les lignes impaires par des -1 et +1 sauf sur la diagonale qui contient que des 0
3. Les lignes paires sont obtenues en multipliant les lignes impaires par -1 (effet miroir)
4. On calcule le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
5. On cherche à **maximiser** le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
 - ✓ on va tester si le changement du signe d'une colonne d'une ligne impaire et de son miroir conduit à une amélioration du déterminant
 - ✓ Les changements de signes sont testés jusqu'à ce que le déterminant soit maximal

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	-1	-1	-1 +1
2	0	+1	+1	+1 -1
3	-1	0	+1	-1
4	+1	0	-1	+1
5	+1	-1	0	+1
6	-1	+1	0	-1
7	+1	+1	-1	0
8	-1	-1	+1	0
9	0	0	0	0

~~$\det(X'X) = 144$~~

$\det(X'X) = 1296$

$\det(X'X) = 144$



Le
déterminant
diminue: le
changement
n'est pas
conservé

Construction

1. On construit une matrice à k colonnes et N lignes ($N=2k+1$) et la dernière ligne est le point au centre
2. On remplit aléatoirement les lignes impaires par des -1 et $+1$ sauf sur la diagonale qui contient que des 0
3. Les lignes paires sont obtenues en multipliant les lignes impaires par -1 (effet miroir)
4. On calcule le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
5. On cherche à **maximiser** le déterminant de la matrice d'information du modèle du premier degré
 - ✓ on va tester si le changement du signe d'une colonne d'une ligne impaire et de son miroir conduit à une amélioration du déterminant
 - ✓ Les changements de signe sont testés jusqu'à ce que le déterminant soit maximal

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	-1	0	-1	1
4	1	0	1	-1
5	-1	-1	0	-1
6	1	1	0	1
7	-1	1	1	0
8	1	-1	-1	0
9	0	0	0	0

$$\det (X'X) = 11664$$

Pourquoi cette structure particulière ?

● Fold over

les effets mono-indicés sont indépendants des effets bi-indicés

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	0	1	-1	-1
3	-1	0	-1	1
5	-1	-1	0	-1
7	-1	1	1	0
9	0	0	0	0



Matrice des aliases

	b12	b13	b23	b14	b24	b34
b1	-2	-2	-1	0	-1	1
b2	1.33	1.66	0.66	-0.33	0	-0.33
b3	1.66	1.33	1.33	0.33	1	-0.66
b4	-0.33	0.33	0.33	-0.66	0	-0.66

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
2	0	-1	1	1
4	1	0	1	-1
6	1	1	0	1
8	1	-1	-1	0
9	0	0	0	0



Matrice des aliases

	b12	b13	b23	b14	b24	b34
b1	2	2	1	0	1	-1
b2	-1.33	-1.66	-0.66	0.33	0	0.33
b3	-1.66	-1.33	-1.33	-0.33	-1	0.66
b4	0.33	-0.33	-0.33	0.66	0	0.66

Pourquoi cette structure si particulière – Analogie avec les matrices d'Hadamard de résolution IV ?

● Fold over

Lignes impaires



Matrice des alias

	b12	b13	b23	b14	b24	b34
b1	-2	-2	-1	0	-1	1
b2	1.33	1.66	0.66	-0.33	0	-0.33
b3	1.66	1.33	1.33	0.33	1	-0.66
b4	-0.33	0.33	0.33	-0.66	0	-0.66

Lignes paires



Matrice des alias

	b12	b13	b23	b14	b24	b34
b1	2	2	1	0	1	-1
b2	-1.33	-1.66	-0.66	0.33	0	0.33
b3	-1.66	-1.33	-1.33	-0.33	-1	0.66
b4	0.33	-0.33	-0.33	0.66	0	0.66

$$E[b1] = \beta_1 - 2\beta_{12} - 2\beta_{13} - \beta_{23} - \beta_{24} + \beta_{34}$$

$$E[b1] = \beta_1 + 2\beta_{12} + 2\beta_{13} + \beta_{23} + \beta_{24} - \beta_{34}$$

$$E[b1] = \beta_1$$

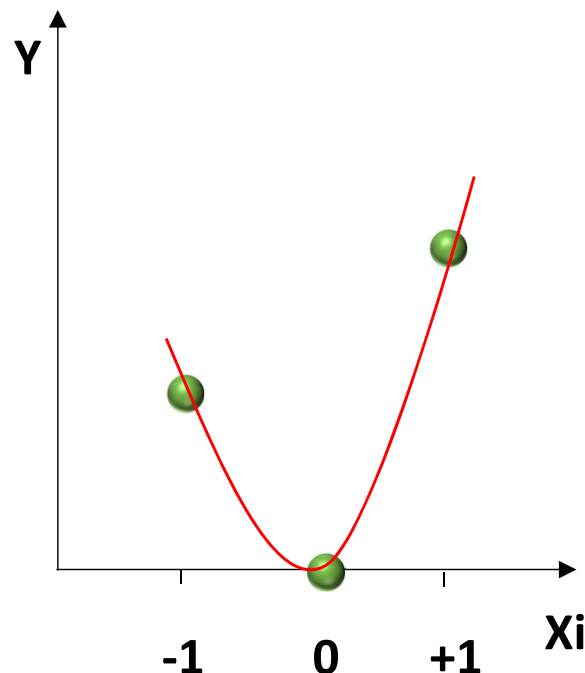
Les effets mono-indicés (b_i) sont indépendants (non aliasés) avec les effets bi-indicés (b_{ij})

Effets principaux indépendants des effets d'interaction

Pourquoi cette construction ?

● Points sur les axes

	X1	X2	X3	X4
1	0	1	-1	-1
2	0	-1	1	1
3	-1	0	-1	1
4	1	0	1	-1
5	-1	-1	0	-1
6	1	1	0	1
7	-1	1	1	0
8	1	-1	-1	0
9	0	0	0	0



Matrice des aliases

	b11	b22	b33	b44
b0	0.67	0.67	0.67	0.67
b1	0	0	0	0
b2	0	0	0	0
b3	0	0	0	0
b4	0	0	0	0

→ Les effets mono-indicés (b_i) sont indépendants (non aliasés) avec les effets quadratiques (b_{ii})

→ Les effets quadratiques sont orthogonaux aux effets principaux et pas complètement confondus avec les effets d'interaction

→ Tous les effets quadratiques peuvent être estimés





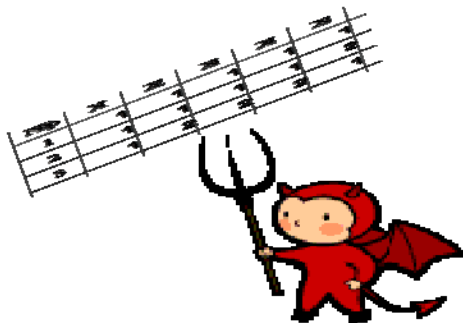
La construction de la matrice :

- Peu d'expériences
- Les effets mono-indicés sont indépendants des effets bi-indicés (effets quadratiques ou effets d'interaction)

UN DEBUT
PROMETTEUR

Mais

Moins d'expériences que de coefficients dans le modèle quadratique complet



Matrices supersaturées

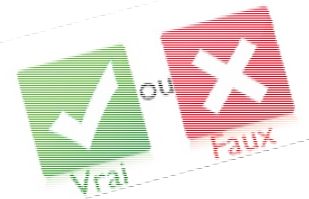
Très peu de coefficients
significatifs



Definitive screening Examples



Entre 6 et 12 facteurs, tous les modèles quadratiques complets peuvent être estimés impliquant 3 facteurs



- $N = 2k + 1$
- On souhaite connaître quelques-uns des p coefficients d'un modèle quadratique complet :

$$p = 1 + k + k + \frac{k(k-1)}{2}$$

effets *mono-indicés* b_i

effets carrés b_{ij}

effets rectangles b_{ij}

Si $k = 4$ $p = 15$

Si $k = 5$ $p = 21$

Si $k = 6$ $p = 28$

...

Nb d'expériences $\ll$ Nb de coefficients



Pas de traitements classiques

Méthodes de résolution

- Régression Ridge

- Régression Stepwise

- R^2 après calcul de toutes les régressions possibles

- Algorithme génétique

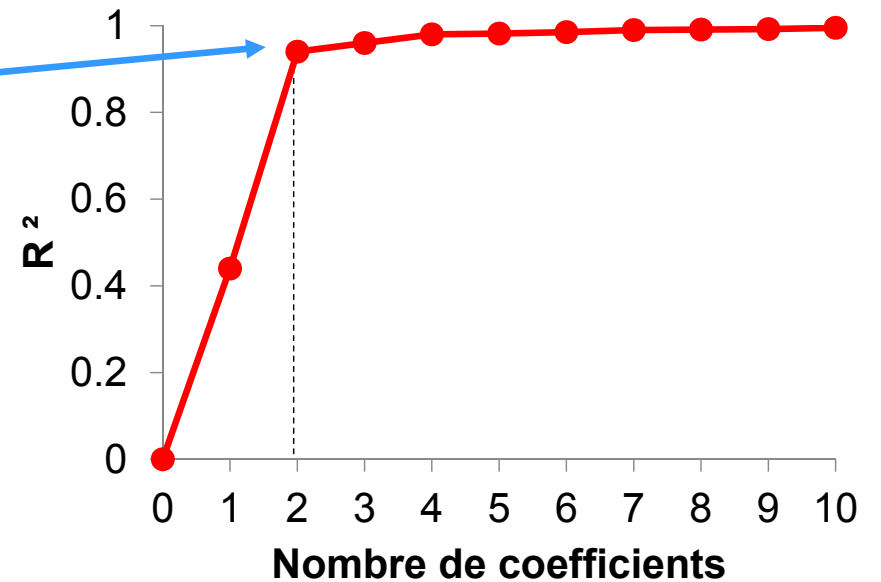
- Approche bayésienne

Régression Stepwise

Etudier un modèle additif par régression Stepwise

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

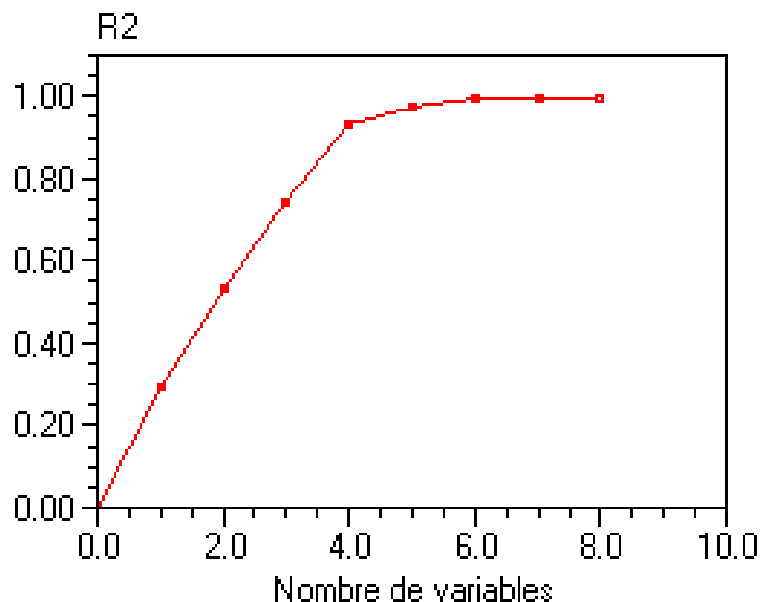
	Coefficients	R ²
1	b2	0.44
2	b3	0.94
3	b9	0.96
4	b5	0.98
5	b1	0.98



Exemple 1 : Publication de Jones

7 coefficients

$$Y1 = 20 + 4X_1 + 3X_2 - 2X_3 - X_4 + 5X_2X_3 - 6X_1^2$$



	Coef.	R2
1	b1	0.2922
2	b2-3	0.5347
3	b1-1	0.7403
4	b2	0.9303
5	b3	0.9734
6	b4	0.9916
7	b4-4	0.9970
8	b2-4	0.9982

Projection de
la matrice



A Class of Three-Level Designs for Definitive Screening in the Presence of Second-Order Effects

BRADLEY JONES

SAS Institute, Cary, NC 27613

CHRISTOPHER J. NACHTSHEIM

Carlson School of Management, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455

Screening designs are attractive for assessing the relative impact of a large number of factors on a response of interest. Experimenters often prefer quantitative factors with three levels over two-level factors because having three levels allows for some assessment of curvature in the factor-response relationship. Yet, the most familiar screening designs limit each factor to only two levels. We propose a new class of designs that have three levels, provide estimates of main effects that are unbiased by any second-order effect, require only one more than twice as many runs as there are factors, and avoid confounding of any pair of second-order effects. Moreover, for designs having six factors or more, our designs allow for the efficient estimation of the full quadratic model in any three factors. In this respect, our designs may render follow-up experiments unnecessary in many situations, thereby increasing the efficiency of the entire experimentation process. We also provide an algorithm for design construction.

Key Words: Alias; Confounding; Coordinate Exchange Algorithm; D-Efficiency; Response Surface Designs; Robust Designs; Screening Designs.

Introduction

Experimenters frequently use screening designs during the early stages of an investigation to identify active effects in the presence of effect sparsity. These designs often target large main (linear) effects, although there is no need to limit the search to first-order terms. As Montgomery (2005) writes, "A major use of fractional factorials is in screening experiments—experiments in which many factors are considered and the objective is to identify those fac-

tors (if any) that have large effects." A quantitative factor can be critically important over the experimental range due to its first-order main effect or to potential second-order effects in the form of two-factor interactions and pure-quadratic effects. In this paper, we introduce a new class of designs for screening quantitative factors in the presence of active first- and second-order effects.

Traditionally, resolution III and IV fractional factorial designs have been widely used for early-stage screening experimentation. An undesirable property of resolution III fractional factorial screening designs (Box and Hunter, 1961) is that they completely confound the main effects of the factors with one or more two-factor interactions. If a confounded effect is active, the experimenter is left with substantial ambiguity. Resolving this ambiguity generally requires the experimenter to perform additional experimental runs. If there is strong reason to suspect the presence of a few active two-factor interactions, a resolution

Dr. Jones is Principal Research Fellow for the JMP Division of SAS and Guest Professor at the University of Antwerp. His email address is bradley.jones@sas.com.

Dr. Nachtsheim is the Frank A. Donaldson Chair of Operations Management, Chair of the Operations and Management Science Department, at the Carlson School of Management, and is a member of the Graduate Faculty of the School of Statistics at the University of Minnesota. His email address is nachts@tc.umn.edu.

Vol. 43, No. 1, January 2011

1

www.asq.org

Exemple 1 : Publication de Jones

7 coefficients

$$Y1 = 20 + 4X_1 + 3X_2 - 2X_3 - X_4 + 5X_2X_3 - 6X_1^2$$

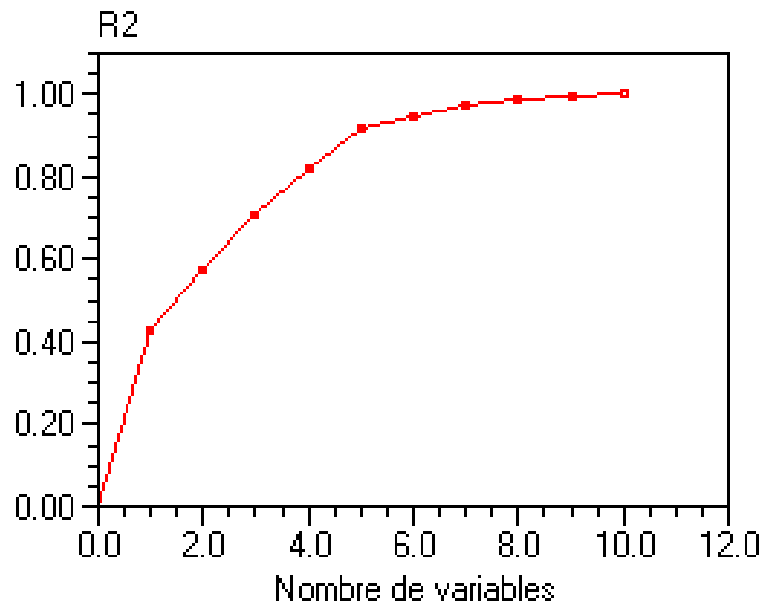
● Matrice des aliases

	G11	G22	G33	G44	G12	G13	G23	G14	G24	G34
Cst	0	0.64	0.64	0.43	0.21	-0.21	0	0.43	-0.64	1.06
b1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1-1	1	0.17	0.17	0.45	-0.28	0.28	0	-0.55	0.83	-1.38
b2-3	0	-0.04	-0.04	-0.36	0.32	-0.32	1	0.64	0.04	0.6

Exemple 2 : modèle de degré 1 + tous les termes carrés

13 coefficients

$$Y2 = 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + X_6 \\ + 3.5X_{11} + 2.3X_{22} - 6.1X_{33} + 2.4X_{44} - 4.7X_{55} - 1.8X_{66}$$



	Coef.	R2
1	b4	0.4243
2	b5	0.5715
3	b3	0.7096
4	b2-6	0.8196
5	b2	0.9145
6	b1	0.9478
7	b4-5	0.9707
8	b5-5	0.9873
9	b2-4	0.9941
10	b6	0.9998

Projection de
la matrice



Coefficients	
b0	16.5
b1	1.9
b2	3.3
b3	-3.9
b4	-6.9
b5	4.1
b6	0.8
b26	3.9

Exemple 2 : modèle de degré 1 + tous les termes carrés

13 coefficients

$$Y_2 = 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + X_6 \\ + 3.5X_{11} + 2.3X_{22} - 6.1X_{33} + 2.4X_{44} - 4.7X_{55} - 1.8X_{66}$$

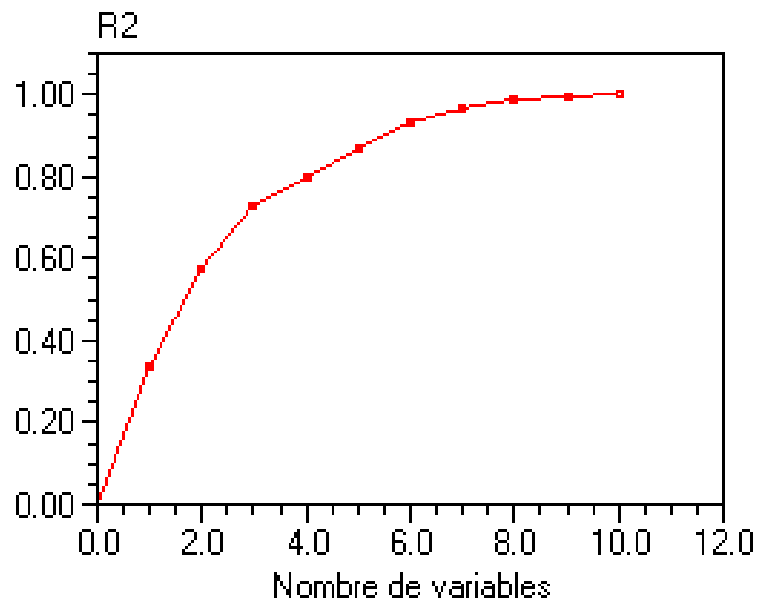
● Matrice des aliases

	G11	G22	G33	G44	G55	G66	G12	G13	G23	G14	G24	G34	G15	G25	G35	G45	G16	G26	G36	G46	G56
Cst	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2-6	0.25	0	-0.25	0.25	-0.25	0	0.25	0.5	-0.25	-0.5	0.25	-0.5	0.5	0.25	-0.5	-0.5	-0.25	1	-0.25	-0.25	0.25

Exemple 3 : modèle de degré 1 + tous les termes rectangles

22 coefficients

$$Y3 = 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + X_6 \\ - 5X_1X_2 + 6X_1X_3 + 2X_2X_3 + 4X_1X_4 - 6X_2X_4 - 7X_3X_4 \\ + 3X_1X_5 + 8X_2X_5 - 6X_3X_5 - 3X_4X_5 + 4X_1X_6 + 2X_2X_6 \\ + 5X_3X_6 + 7X_4X_6 + 9X_5X_6$$



	Coef.	R2
1	b1-4	0.3381
2	b4	0.5730
3	b1-2	0.7278
4	b3	0.7999
5	b5	0.8681
6	b1-5	0.9336
7	b2	0.9700
8	b1	0.9879
9	b1-3	0.9951
10	b6	0.9991

Projection de
la matrice



Coefficients	
b0	20
b1	2
b2	2.8
b3	-4
b4	-7.2
b5	3.9
b12	5.2
b14	-9.8
b15	4.6

Exemple 3 : modèle de degré 1 + tous les termes rectangles

22 coefficients

$$\begin{aligned}
 Y3 = & 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + X_6 \\
 & -5X_1X_2 + 6X_1X_3 + 2X_2X_3 + 4X_1X_4 - 6X_2X_4 - 7X_3X_4 \\
 & + 3X_1X_5 + 8X_2X_5 - 6X_3X_5 - 3X_4X_5 + 4X_1X_6 + 2X_2X_6 \\
 & + 5X_3X_6 + 7X_4X_6 + 9X_5X_6
 \end{aligned}$$

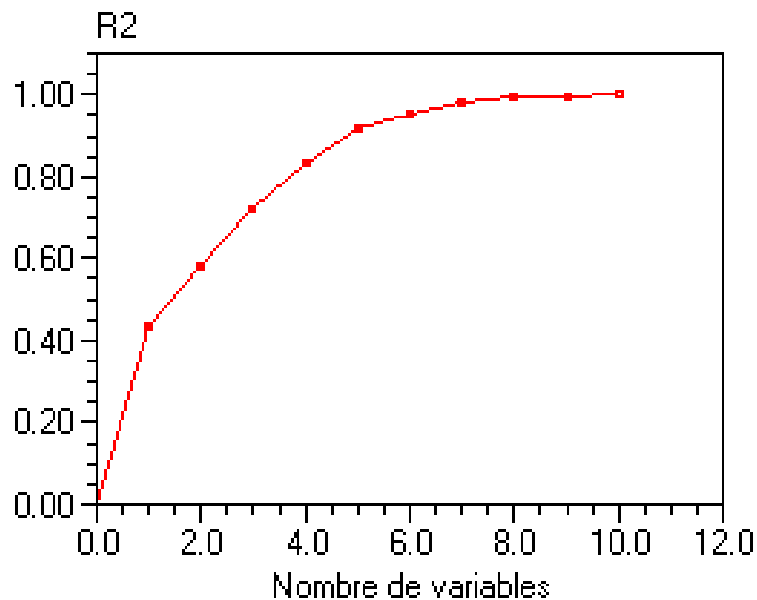
● Matrice des alias

	G11	G22	G33	G44	G55	G12	G13	G23	G14	G24	G34	G15	G25	G35	G45
Cst	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1-2	0	0.2	-0.3	0.2	0.2	1	0.5	0.3	0	-0.2	0.7	0	-0.2	-0.3	-0.8
b1-4	0	-0.4	0.3	0	0.2	0	-0.5	0.3	1	0.2	-0.1	0	-0.4	-0.5	0.6
b1-5	0	-0.4	-0.1	0.2	0	0	-0.5	-0.5	0	-0.4	-0.7	1	0.2	-0.3	0.6

Exemple 4 : modèle de degré 1 + 2 termes carrés + 1 terme rectangle

10 coefficients

$$Y_4 = 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + X_6 + 5.5X_1^2 - 4X_6^2 + 3X_1X_6$$



	Coef.	R2
1	b4	0.4351
2	b3	0.5810
3	b5	0.7213
4	b2-3	0.8356
5	b2	0.9177
6	b1	0.9558
7	b1-4	0.9839
8	b6	0.9919
9	b4-4	0.9978
10	b3-4	0.9999

Projection de la matrice



Coefficients	
b0	21
b1	2.1
b2	3.1
b3	-4.1
b4	-7
b5	4
b23	4

Exemple 4 : modèle de degré 1 + 2 termes carrés + 1 terme rectangle

10 coefficients

$$Y_4 = 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + X_6 + 5.5X_1^2 - 4X_6^2 + 3X_1X_6$$

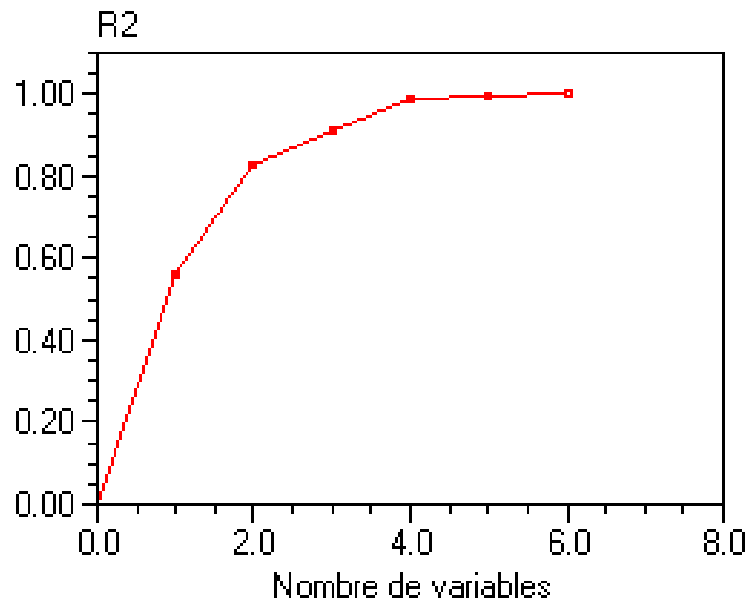
● Matrice des aliases

	G11	G22	G33	G44	G55	G12	G13	G23	G14	G24	G34	G15	G25	G35	G45
Cst	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2-3	0.25	0	0	-0.25	0.25	0.25	-0.25	1	0.5	0.25	0.25	-0.5	0.25	-0.25	-0.5

Exemple 5 : 2 termes mono-indicés + 2 termes carrés + 1 terme rectangle

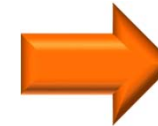
6 coefficients

$$Y_5 = 20 + 2X_1 - 5X_6 + 5.5X_1^2 - 4X_6^2 + 3X_1X_6$$



	Coef.	R2
1	b6	0.5639
2	b4-5	0.8296
3	b1	0.9127
4	b2-3	0.9888
5	b6-6	0.9977
6	b1-2	0.9990

Projection de
la matrice



Coefficients	
b0	21
b1	2
b2	0
b3	-0.1
b4	0.1
b5	-0.1
b6	-5.1
b23	2.4
b45	-2.7

Exemple 5 : 2 termes mono-indicés + 2 termes carrés + 1 terme rectangle

6 coefficients

$$Y5 = 20 + 2X_1 - 5X_6 + 5.5X_1^2 - 4X_6^2 + 3X_1X_6$$

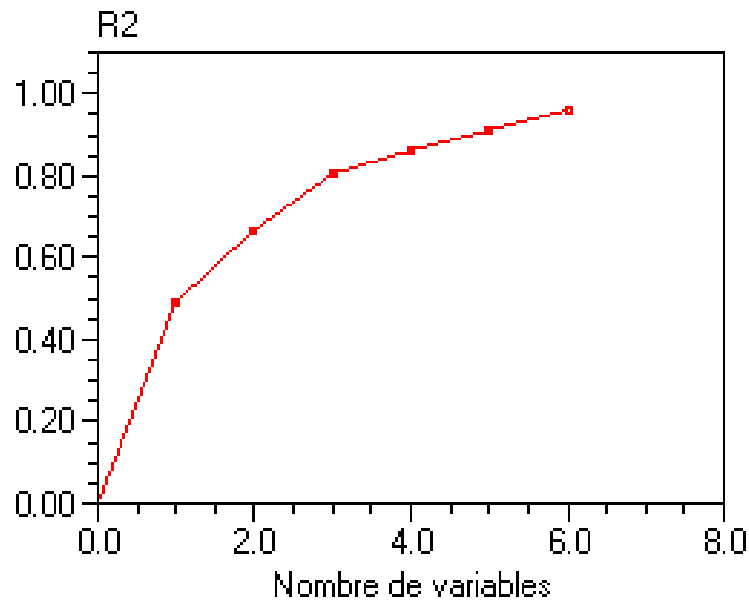
● Matrice des aliases

	G11	G22	G33	G44	G55	G66	G12	G13	G23	G14	G24	G34	G15	G25	G35	G45	G16	G26	G36	G46	G56
Cst	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2-3	0.17	-0.17	0.17	-0.33	0.33	-0.17	0	-0.67	1	0.83	0.17	0.17	-0.5	0.17	-0.17	0	0.33	-0.67	0	-0.5	-0.83
b4-5	-0.17	-0.33	0.33	-0.17	0.17	0.17	-0.5	-0.83	0	0.67	-0.17	-0.17	0	-0.17	0.17	1	-0.33	-0.83	0.5	0	-0.67

Exemple 6 : 5 termes mono-indicés + 3 termes rectangles

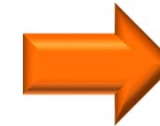
9 coefficients

$$Y_6 = 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + 4X_1X_2 + 8X_2X_3 - 7X_4X_5$$



	Coef.	R2
1	b4-5	0.4932
2	b4	0.6633
3	b2-3	0.8085
4	b3	0.8613
5	b5	0.9137
6	b3-6	0.9578

Projection de
la matrice



Coefficients	
b0	20
b2	2.9
b3	-3.9
b4	-7
b5	3.9
b6	-0.2
b23	8.3
b45	-11.4
b36	4.6

Exemple 6 : 5 termes mono-indicés + 3 termes rectangles

9 coefficients

$$Y_6 = 20 + 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 7X_4 + 4X_5 + 4X_1X_2 + 8X_2X_3 - 7X_4X_5$$

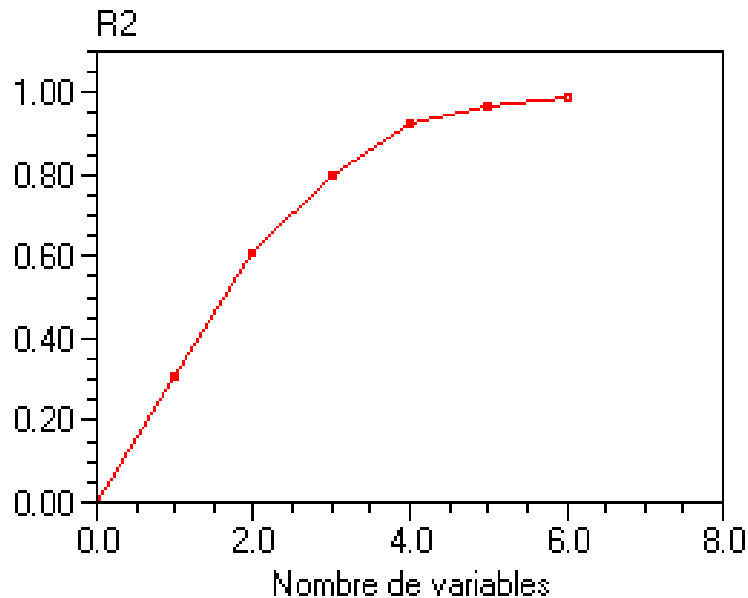
● Matrice des aliases

	G11	G22	G33	G44	G55	G12	G13	G23	G14	G24	G34	G15	G25	G35	G45
Cst	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2-3	-0.17	0.17	-0.33	0.33	-0.17	1	0.17	0.17	0.17	-0.17	0	-0.67	0	-0.5	-0.83
b4-5	-0.25	0.42	-0.33	0	0.25	0	0.08	-0.42	0.08	0.42	1	-0.83	0	0.25	-0.92
b3-6	-0.17	-0.17	0.33	0.33	-0.17	0	-0.5	0.5	-0.5	-0.5	0	0	1	-0.5	0.5

Exemple 7 : 3 termes mono-indicés + 3 termes rectangles

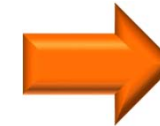
7 coefficients

$$Y7 = 20 + 2X_1 - 4X_3 - 5X_6 + 6X_1X_3 + 3X_1X_6 + 5X_3X_6$$



	Coef.	R2
1	b5-6	0.3057
2	b6	0.6102
3	b3	0.8021
4	b1-4	0.9246
5	b1	0.9693
6	b2-4	0.9907

Projection de
la matrice



Coefficients	
b0	20
b1	2
b2	0.1
b3	-4
b4	-0.1
b5	0.1
b6	-5.1
b14	4.2
b24	1.7
b56	8.7

Exemple 7 : 3 termes mono-indicés + 3 termes rectangles

7 coefficients

$$Y7 = 20 + 2X_1 - 4X_3 - 5X_6 + 6X_1X_3 + 3X_1X_6 + 5X_3X_6$$

● Matrice des aliases

	G11	G22	G33	G44	G55	G66	G12	G13	G23	G14	G24	G34	G15	G25	G35	G45	G16	G26	G36	G46	G56
Cst	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b1-4	-0.17	-0.17	0.17	0.17	0.33	-0.33	0.67	0	0.33	1	0	0.67	-0.17	-0.83	-0.5	0.17	-0.17	-0.5	0.83	-0.17	0
b2-4	0.17	0.17	0.17	0.17	-0.33	-0.33	0	1	0	0	1	0	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	0.5	0
b5-6	-0.25	0.25	-0.08	0.42	0	-0.33	0.83	1	-0.33	0	0	0.83	-0.08	-0.92	-0.25	-0.42	-0.08	0.25	0.42	0.42	1

ORIGINAL

1. The number of required runs is only one more than twice the number of factors.

VRAI

Peu couteux en termes d'expériences

2. Unlike resolution III designs, main effects are completely independent of two-factor interactions. As a result, estimates of main effects are

Effets principaux indépendants des effets

3.

A utiliser avec précaution !!

4.

5.

and not completely confounded (though correlated) with interaction effects.

VRAI

Effets principaux et pas complètement confondus avec les effets d'interaction

6. With 6 through (at least) 12 factors, the designs are capable of estimating all possible full quadratic models involving three or fewer factors with very high levels of statistical efficiency.

FAUX

Entre 6 et 12 facteurs, tous les modèles quadratiques complets peuvent être estimés impliquant au maximum 3 facteurs